

Тема 1. Лекция.

Матрицы и определители. Системы линейных алгебраических уравнений

§1. Матрицы и их виды

Матрица обозначается заглавными латинскими буквами (A, B, C, \dots).

Определение 1. Прямоугольная таблица вида $A_{m \times n}$,

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется **матрицей**.

$$\|a_{ij}\| \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

a_{ij} - элемент матрицы. Элементами матрицы могут быть числа, векторы, многочлены и сами матрицы.

Матрица - это только **таблица** и ей не приписывают никакого числового значения.

Виды матриц:

1. Величина $m \times n$ называется **размерностью** матрицы ($m \neq n$).
2. Если $m = n$, матрица называется **квадратной**, ее размерность n .
3. Если все элементы матрицы нули, то матрица называется **нулевой**.

4. Матрица вида: $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, называется **диагональной**.

5. Матрица вида: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, называется **единичной**.

6. Матрица вида: $A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n})$, называется **матрица-строка**.

7. Матрица вида: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, называется **матрица-столбец**.

8. A^T , полученная из данной матрицы A путем замены в ней местами строк и столбцов, называется **транспонированной** по отношению к матрице A .

§2. Определители 2, 3 и n-го порядка

Пусть даны две квадратные матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

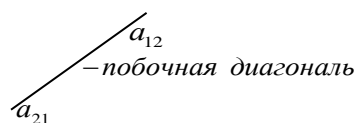
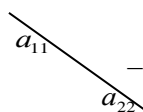
матрица 2-го порядка

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

матрица 3-го порядка

Определение 1. Определителем второго порядка матрицы A_1 называется число,

обозначаемое Δ и равное $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$, где



Пример 1. Вычислить определитель 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot (-2) = 15 + 8 = 23$$

Частный случай: Определителем матрицы первого порядка $A = ||a_{11}||$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11} .

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}$$

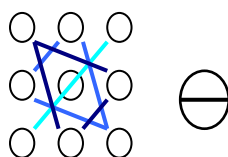
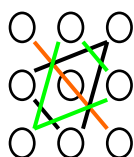
Определение 2. Определителем 3-го порядка квадратной матрицы A_2 называется число вида:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Это один из способов вычисления определителя по элементам 1-ой строки. Аналогично можно разлагать по элементам любой строки или столбца, учитывая при этом правило знаков

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

При вычислении определителя 3-го порядка можно использовать также правило треугольника или правило Сарруса.



$$\Delta = |A_3| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Определение 3. Если определитель состоит из n -строк и n -столбцов, то он называется определителем n -го порядка.

Таким образом, можно рассматривать определители 4, 5 и т.д. порядков. Все они вычисляются разложением по элементам строк или столбцов.

Пример 2 . Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0 \cdot 7 - 5 \cdot 2) - 2 \cdot (4 \cdot 7 - 1 \cdot 2) + 3 \cdot (4 \cdot 5 - 1 \cdot 0) = -30 - 52 + 60 = -22$$

Свойства определителей:

- 1) Определитель не меняется, если в нем строки и столбцы поменять местами.
- 2) Если в определителе поменять местами какие-либо две строки или два столбца, то определитель изменит только знак.
- 3) Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.
- 4) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.
- 5) Определитель равен нулю, если элементы каких-либо двух строк равны или пропорциональны.
- 6) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое не равное нулю число. Это так называемый способ получения нулей.

Пример 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & -13 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -13 & 12 \end{vmatrix} = -24 + 91 = 67$$

Определение 4. Определитель, полученный из данного путем вычеркивания столбца и строки, называется **минором** соответствующего элемента. M_{ij} элемента a_{ij}

Из примера 3: $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

§4. Формулы Крамера

1. Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases} \begin{matrix} \cdot a_{22} \\ \cdot a_{12} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot x_2 = b_1 \cdot a_{22} \\ a_{21} \cdot a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot a_{12} \cdot x_2 = b_2 \cdot a_{12} \end{cases}$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1 - a_{21} \cdot a_{12} \cdot x_1 = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

$$x_1(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$$

Аналогично можно вывести формулу для переменной x_2 :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases} \begin{matrix} \cdot a_{21} \\ \cdot a_{11} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a_{21} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_2 = b_1 \cdot a_{21} \\ a_{21} \cdot a_{11} \cdot x_1 + a_{22} \cdot a_{11} \cdot x_2 = b_2 \cdot a_{11} \end{cases}$$

$$a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_2 - a_{22} \cdot a_{11} \cdot x_2 = b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11}$$

$$x_2 \cdot (a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{11}) = b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11}$$

$$x_2 = \frac{b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11}}{a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{11}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$$

Окончательно имеем: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ - **формулы Крамера**, где:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - главный определитель системы ;

$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ - вспомогательный определитель для x_1 ;

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - \text{вспомогательный определитель для } x_2.$$

Виды решений системы 2-х линейных уравнений:

- 1) $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение $(x_1; x_2)$
- 2) $\Delta = 0$; $\Delta_{x_i} \neq 0$; $i = 1, 2$ – система не имеет решения
- 3) $\Delta = \Delta_{x_i} = 0$ – система имеет множество решений

2. Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (x_1; x_2; x_3) - ?$$

Эту систему тоже можно решить по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \quad ; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \quad , \text{ где}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{главный определитель системы}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

-вспомогательные определители системы.

§5. Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

В основе метода Гаусса лежит последовательное исключение неизвестных. С помощью элементарных преобразований, система уравнений приводится к ей равносильной ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних переменных, находят все остальные.

При решении методом Гаусса можно:

